

中学校数学科

第3学年

6 三平方の定理

[思考力・判断力・表現力を育む問題]

中学校

年 組 号 氏名

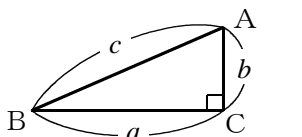
■ 数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題 年 組 号 氏名

■ 練習問題①

下の三平方の定理の証明の方法について、太郎さんと花子さんが考えています。あとの(1)、(2)の各問いに答えなさい。

● 三平方の定理 ●

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a, b , 斜辺の長さを c とすると、次の関係が成り立つ。

$$a^2 + b^2 = c^2$$


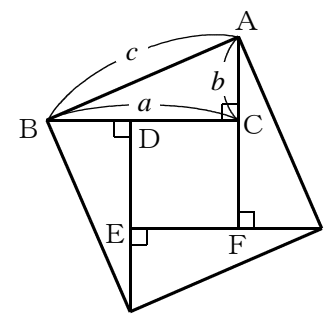
(1) 太郎さんは、次のように考えて証明をしました。アからウの にあてはまる式を答えなさい。

証明

直角三角形ABCと、直角三角形ABCと合同な三角形を右の図のように並べると、1辺の長さが c である正方形の内側に、1辺の長さが ア である正方形CDEFができる。4つの直角三角形と正方形CDEFの面積の和は、1辺の長さが c である正方形の面積に等しいから、

$$4 \times \text{イ} + (\text{ア})^2 = \text{ウ}$$

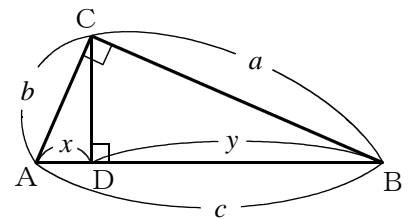
左辺を整理すると、 $a^2 + b^2 = \text{ウ}$



【解答】

ア イ ウ

(2) 右のように直角三角形ABCの頂点Cから斜辺ABに垂線CDをひくと、 $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle CBD$ はすべて相似になります。このことを利用して、花子さんは、次のように証明をしました。証明の①の部分~~を参考にして~~、②の部分にあてはまる比例式と等式を答えなさい。また、③にあてはまる等式を答えなさい。



証明

$AD = x, BD = y$ とすると、

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ だから, } b : x = c : b \\ b^2 = cx \end{array} \right\} \text{①}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle CBD \text{ だから, } \begin{array}{l} : = : \\ = \end{array} \end{array} \right\} \text{②}$$

よって、 $a^2 + b^2 = cy + cx$

$$= c(x + y)$$

③ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ } = \end{array} \right.$ だから、 $a^2 + b^2 = c^2$

【解答】

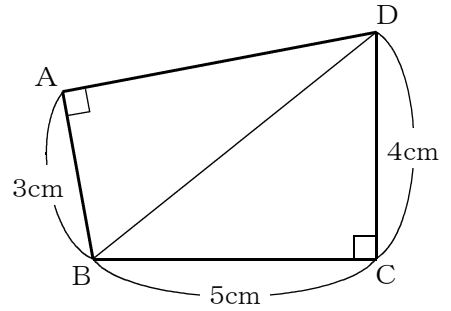
② $\left\{ \begin{array}{l} : = : \\ = \end{array} \right.$

③ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ } = \end{array} \right.$

■ 数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題 年 組 号 氏名

■ 練習問題②

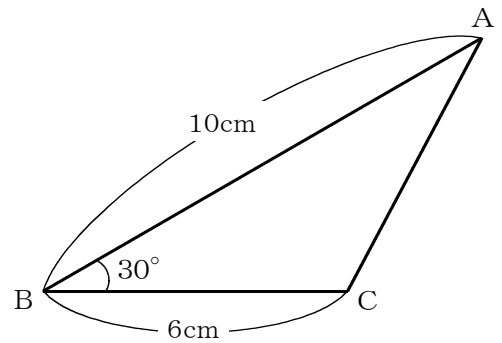
- 1 右のような $\angle A = \angle C = 90^\circ$ である四角形 ABCD において、辺 AD の長さを求めなさい。



【解答】

cm

- 2 右のような $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

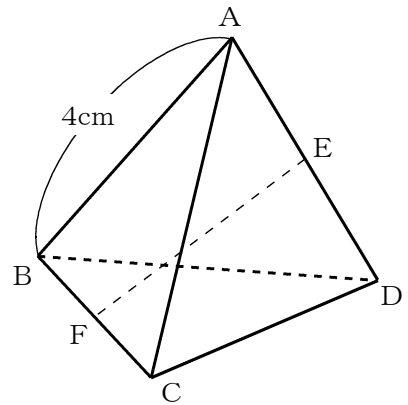


【解答】

cm^2

- 3 右のような 1 辺の長さが 4 cm である正四面体 ABCD において、辺 AD, BC の中点をそれぞれ E, F とするとき、次の (1), (2) の各問いに答えなさい。

- (1) 線分 EF の長さを求めなさい。



【解答】

cm

- (2) 正四面体 ABCD の体積は、三角錐 CAFD の体積の 2 倍になります。このことを利用して、正四面体 ABCD の体積を求めなさい。

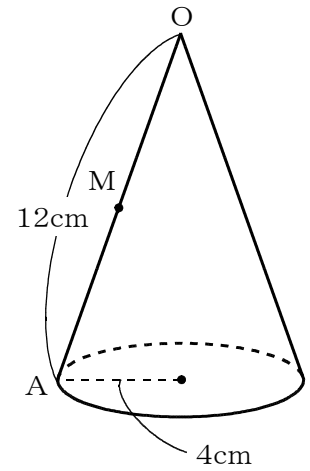
【解答】

cm^3

■ 数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題 年 組 号 氏名

■ 練習問題③

右のような底面の半径が4cmで、母線であるOAの長さが12cmの円錐があります。OAの中点をMとするとき、次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

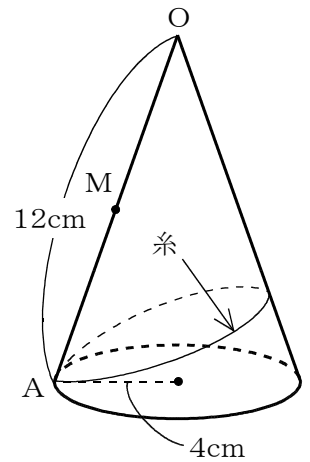


(1) 円錐の側面積を求めなさい。

【解答】

	cm ²
--	-----------------

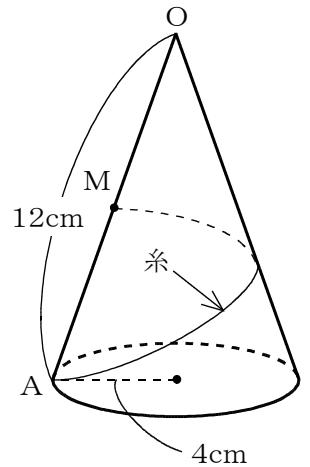
(2) 右のように、点Aから円錐の側面に沿って1周して点Aまで糸を張るとき、最も短くなるときの糸の長さを求めなさい。



【解答】

	cm
--	----

(3) 右のように、点Aから円錐の側面に沿って1周して点Mまで糸を張るとき、最も短くなるときの糸の長さを求めなさい。



【解答】

	cm
--	----

中学校数学科

第3学年

6 三平方の定理

[思考力・判断力・表現力を育む問題]

[解答例]

中学校

年 組 号 氏名

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■練習問題①

(1)

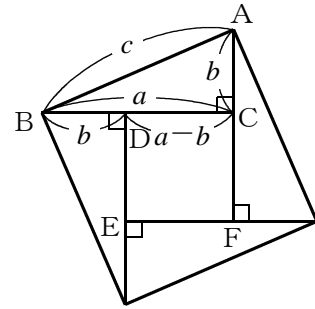
ア $a - b$ イ $\frac{1}{2}ab$ ウ c^2

【ポイント】
 右の図のように、正方形CDEFの1辺の長さは $a - b$ となるね。また、式の左辺については、次のように整理することができるね。

$$\cancel{4}^2 \times \frac{1}{\cancel{2}} ab + (a - b)^2 = c^2$$

$$2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = c^2$$

$$\cancel{2ab} + a^2 - \cancel{2ab} + b^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$


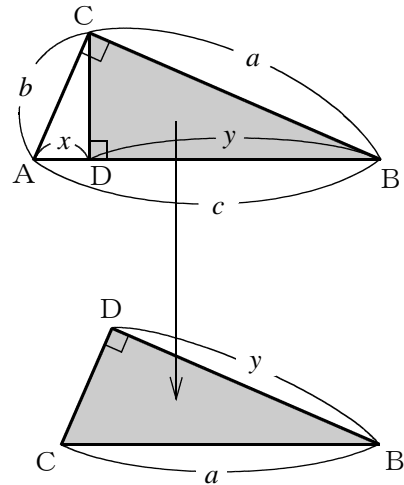
(2)

② $a : y = c : a$ $\left(\begin{array}{l} y : a = a : c \quad c : a = a : y \\ a^2 = cy \quad , \quad cy = a^2 \quad \text{など, 同値な式は正答とする。} \end{array} \right)$

③ $x + y = c$

【ポイント】
 (②について)
 $\triangle ABC$ の $\triangle CBD$ で、右の図のようにそれぞれ $\triangle ABC$ の辺 BC に対し、 $\triangle CBD$ の辺 BD 、 $\triangle ABC$ の辺 AB に対し、 $\triangle CBD$ の辺 CB が対応している辺になっているね。
 だから、 $BC : BD = AB : CB$ となり、
 比例式の外側の項の積と内側の項の積は等しいから、
 $a : y = c : a$
 $a^2 = cy$ となるね。

(③について)
 $AB = c$ で、 $AD = x$ 、 $BD = y$ としているので、
 $x + y = c$ はいえることだね。
 $x + y = c$ より、 $c(x + y) = c^2$ はいえるので、
 $a^2 + b^2 = c^2$ が導けるね。



■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■練習問題②

1 $4\sqrt{2}$ cm

【ポイント】

次のように求めるといいね。

$\triangle BCD$ において、 $\angle C = 90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$BD^2 = 5^2 + 4^2 = 41$$

$BD > 0$ より、

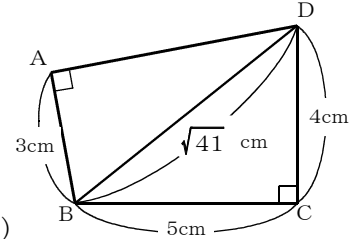
$$BD = \sqrt{41} \text{ (cm)}$$

$\triangle ABD$ において、 $\angle A = 90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$AD^2 + 3^2 = (\sqrt{41})^2$$

$$AD^2 = 41 - 9 = 32$$

$$AD > 0 \text{より、} AD = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$



2 15 cm^2

【ポイント】

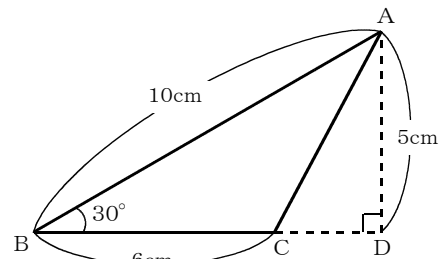
右の図のように、点Aから直線BCに垂線をひいて、

$\angle ADB = 90^\circ$ となる直角三角形ABDをつくると、

$\angle B = 30^\circ$ より、 $AD : BD : AB = 1 : \sqrt{3} : 2$ となるね。

$AB = 10 \text{ (cm)}$ だから、 $AD = 5 \text{ (cm)}$ となり、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15 \text{ (cm}^2\text{)} \text{となるね。}$$



3 (1) $2\sqrt{2}$ cm

【ポイント】

次のように求めるといいね。

$\triangle ABC$ は正三角形で、

$BF = 2 \text{ cm}$ 、 $\angle AFB = 90^\circ$

となるから、 $AF^2 + 2^2 = 4^2$

$$AF^2 = 16 - 4 = 12$$

$AF > 0$ より、

$$AF = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$\triangle FAD$ は、 $AF = FD$ の二等辺

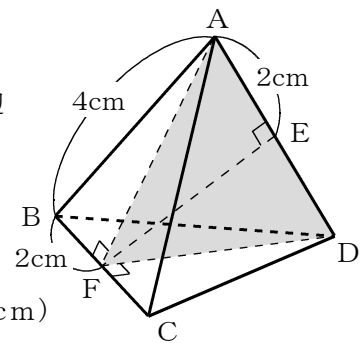
三角形で、 $AE = 2 \text{ cm}$ 、

$\angle AFE = 90^\circ$ となるから、

$$EF^2 + 2^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$EF^2 = 12 - 4 = 8$$

$$EF > 0 \text{より、} EF = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$



(2) $\frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

【ポイント】

三角錐CAFDの底面を $\triangle AFD$ と考えると、高さはFCとなるから、

三角錐CAFDの体積は、

$$\frac{1}{3} \times \triangle AFD \times FC$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} \times 2$$

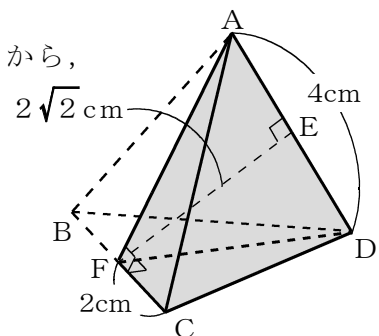
$$= \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)} \text{となるね。}$$

正四面体ABCDの体積は、

三角錐CAFDの体積の2倍

だから、

$$\frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)} \text{となるね。}$$



■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■練習問題③

(1) $24\pi\text{ cm}^2$

【ポイント】

円錐の側面は、展開図のおうぎ形の部分だから、次のように、円錐の展開図のおうぎ形の面積を求めるといいね。

(求め方①)

おうぎ形の中心角を x° とすると、

$$2\pi \times 12 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 4$$

これを解いて、 $x = 120$

よって、求める側面積は、

$$\pi \times 12^2 \times \frac{120}{360} = 48\pi (\text{cm}^2)$$

(求め方②)

おうぎ形の弧の長さは、底面の

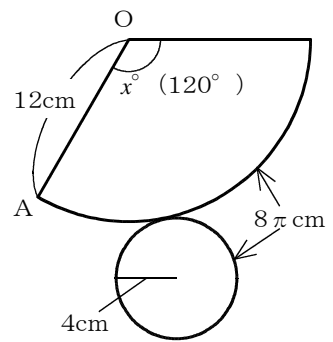
円周の長さに等しく、 $8\pi\text{ cm}$ 。

また、半径が12cmの円周の長さは、 $24\pi\text{ cm}$ 。

よって、求める側面積は、

$$\pi \times 12^2 \times \frac{8\pi}{24\pi} = 48\pi (\text{cm}^2)$$

円錐の展開図



(2) $12\sqrt{3}\text{ cm}$

【ポイント】

(1)から、円錐の側面は右図のような中心角が 120° のおうぎ形になるね。

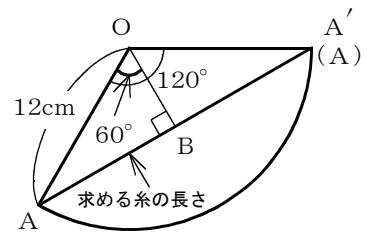
(1)を(求め方②)で求めた場合、中心角は、

$$360 \times \frac{8\pi}{24\pi} = 120^\circ \text{ と求められるね。}$$

求める糸の長さは、右図の点Aと点A'を結ぶ最短の長さ、つまり、弦AA'の長さになるね。

点Oから弦AA'に垂線をひき、その交点をBとすると、 $\angle AOB = 60^\circ$ となるから、 $\triangle OAB$ は、3辺の比が $1:\sqrt{3}:2$ の直角三角形になるね。

OA=12cmだから、 $AB = 6\sqrt{3}\text{ cm}$ となり、求める糸の長さは、 $12\sqrt{3}\text{ cm}$ となるね。



4 $6\sqrt{7}\text{ cm}$

【ポイント】

求める糸の長さは、右図のおうぎ形の点Aと点Mを結ぶ最短の長さ、つまり、線分AMの長さになるね。

右図のように、直角三角形である $\triangle OAC$ をつくると、 $\angle COA = 60^\circ$ だから、 $\triangle OAC$ の3辺の比は、

$1:\sqrt{3}:2$ となるね。AO=12(cm)より、 $AC = 6\sqrt{3}\text{ (cm)}$ 、 $CM = CO + MO = 6 + 6 = 12\text{ (cm)}$ となるので

$$AM^2 = 12^2 + (6\sqrt{3})^2 = 144 + 108 = 252$$

AM>0より、 $AM = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}\text{ (cm)}$ となるね。

